Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA-1111)
$2^{do}$ Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2022
Tipo Unico

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **[3 puntos]** Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

2. **[Total: 18 puntos]** Calcule los siguientes límites:

   *a*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to 3} x\lfloor x \rfloor$

   *b*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$

   *c*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to a} (x-a) \operatorname{cotg}\left( \dfrac{\pi x}{a} \right)$

   *d*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^2(x) - 1}{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}$

   *e*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x^2 - x}$

   *f*) **[3 puntos]** $\lim\limits_{x \to 3} |x-3| \operatorname{sen}\left( \dfrac{1}{x-3} \right)$.

3. **[4 puntos]** Compruebe que el polinomio $2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{5}$ tiene dos raíces negativas y una raíz positiva.

4. **[6 puntos]** Halle los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ para que la función $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   sea diferenciable en $x = 0$ y continua en $x = 1$

5. **[4 puntos]** Hay dos rectas tangentes a la curva de ecuación $y = 4 - x^2$ que pasan por el punto $P(0, 8)$. Usando la definición de derivada, halle las ecuaciones de ambas rectas tangentes.

**SOLUCIÓN**

- **[3 puntos]** Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

La definición formal del límite es:

**Definición formal del límite**

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 / \; \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

De la definición de $\varepsilon$ se tiene que $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$. Desarrollamos:

$$\left|(\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}\right| = \left|\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x} + 2|} \cdot |x - 4| < \varepsilon$$

Se debe acotar superiormente la expresión $\dfrac{1}{|\sqrt{x} + 2|}$. Para ello, de la definición de $\delta$ se tiene que $|x - 4| < \delta$. Escogemos $\delta = 1$ y desarrollamos:

$$|x - 4| < 1 \longrightarrow -1 < x - 4 < 1 \longrightarrow 3 < x < 5$$

A partir de aquí, construimos la función $\dfrac{1}{|\sqrt{x} + 2|}$:

$$\sqrt{3} < \sqrt{x} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3} + 2 < \sqrt{x} + 2 < \sqrt{5} + 2$$

Aplicamos la recíproca $(f(x)^{-1})$. Esto invierte el orden de la triple desigualdad:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + 2} < \frac{1}{\sqrt{x} + 2} < \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$$

Finalmente, la cota superior viene dada por:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x} + 2}\right| < \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$$

Sustituimos en la definición de $\varepsilon$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x} + 2}\right| \cdot |x - 2| < \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \cdot |x - 4| < \varepsilon \longrightarrow |x - 4| < (\sqrt{3} + 2) \cdot \varepsilon$$

Luego,

**Valores de $\delta$**

$$\delta = \text{mín}\{1, (\sqrt{3} + 2) \cdot \varepsilon\}$$

- **[Total: 18 puntos]** Calcule los siguientes límites:

**1.**

$$\lim_{x\to 3} x\lfloor x\rfloor$$

Recordemos la definición de la función parte entera (piso):

$$\lfloor x\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

La función tiene los siguientes valores cerca de $x = 3$:

$$\lfloor x\rfloor = \begin{cases} 2 & si \quad 2 < x < 3 \\ \\ 3 & si \quad 3 < x < 4 \end{cases}$$

Resolvemos límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} x\lfloor x\rfloor = (3)\cdot(2) = 6$$

**Límite lateral izquierdo**

$$\lim_{x\to 3^-} x\lfloor x\rfloor = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} x\lfloor x\rfloor = (3)\cdot(2) = 9$$

**Límite lateral derecho**

$$\lim_{x\to 3^+} x\lfloor x\rfloor = 9$$

Vemos que los límites laterales no son iguales, y recordemos que para que un límite exista, sus límites laterales deben ser iguales, tal que:

**Existencia del límite**

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Así pues, vemos que este límite no cumple con esta condición. Luego, el límite no existe.

**1. Respuesta**

$$\lim_{x\to 3} x\lfloor x\rfloor \text{ no existe}$$

**2.**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

Este límite, al evaluarlo presenta una indeterminación $\infty-\infty$. Así pues, manipulamos algebráicamente la expresión para obtener una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.

Realizamos la suma de fracciones

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3-3}{(1-x)(1-x^3)}$$

Recordemos que $1-x^3=(1-x)\cdot(x^2+x+1)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{(x^+x+1)-3}{(1-x^3)} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}-\frac{\cancel{(1-x)}(x+2)}{\cancel{(1-x)}(x^2+x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}-\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}
\end{aligned}$$

Al hacer la sustitución tenemos:

$$\lim_{x\to 1}-\frac{(1+2)}{(1^2+1+1)}=-\frac{3}{3}=-1$$

Finalmente, vemos que el límite existe y vale -1. Luego

**2. Respuesta**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-1$$

**3.**

$$\lim_{x\to a}(x-a)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Este límite, al evaluarlo presenta una indeterminación $0\cdot\infty$. Así pues, manipulamos algebráicamente la expresión para obtener una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$.

Recordemos que $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$. La expresión queda de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a} (x-a)\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}$$

Este límite presenta una indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Debemos manipular la expresión para que aparezca el límite notable $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} a}{a} = 1$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = x-a \quad x = u+a \quad u\to 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}(u+a)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}(u+a)\right)} &= \lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}u+\pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}u+\pi\right)}\\
&= \lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}u\right)\cdot\cancelto{-1}{\cos(\pi)} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}u\right)\cdot\cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}u\right)\cdot\cancelto{-1}{\cos(\pi)} + \cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{a}u\right)}\\
\text{Multiplicamos y dividimos por } \frac{\pi}{a} &= \lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}u\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}u\right)}\cdot\frac{\frac{\pi}{a}}{\frac{\pi}{a}}\\
&= \cancelto{1}{\lim_{u\to 0}\frac{\pi u}{a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}u\right)}}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}u\right) = \frac{a}{\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente, vemos que el límite existe y vale $\dfrac{a}{\pi}$. Luego:

**3. Respuesta**

$$\lim_{x\to a}(x-a)\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{a}{\pi}$$

**4.**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2(x)-1}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

Este límite presenta una indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Recordando que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-1}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos(x)-\operatorname{sen}(x))} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{(\operatorname{sen} x-\cos x)}\cdot(\operatorname{sen} x+\cos x)}{-\cos^2 x\cancel{(\operatorname{sen}(x)-\cos(x))}} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, vemos que el límite existe y vale $-2\sqrt{2}$. Luego:

**4. Respuesta**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(x)-1}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = -2\sqrt{2}$$

**5.**

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2-x}$$

Este límite presenta una indeterminación $\infty-\infty$. Racionalizamos la expresión hasta llegar a una indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-x}$, la conjugada de la expresión que tenemos en el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2-x})\cdot\frac{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-x})}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-x})} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2+1)-(2x^2-x)}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-x})} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-x})} \\
\text{Factor común } x^2 &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}
\end{aligned}$$

Por la definición de la función valor absoluto $f(x)=|x|$ se tiene que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Como el límite tiende a $-\infty$, entonces $|x| = -x$.

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Finalmente, vemos que el límite existe y vale $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Luego:

**5. Respuesta**

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2x^2-x} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

**6.**

$$\lim_{x\to 3} |x-3| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

Este límite, al evaluarlo presenta una indeterminación $0\cdot\infty$. Así pues, manipulamos algebráicamente la expresión para obtener una indeterminación de otro tipo.

Recordemos que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ está acotada entre $-1$ y 1, tal que:

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Luego, podemos acotar la función $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$ entre -1 y 1

$$-1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) \le 1$$

Multiplicamos por $|x-3|$ y aplicamos $\lim\limits_{x\to 3}$:

$$\lim_{x\to 3} -|x-3| \le \lim_{x\to 3} |x-3| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) \le \lim_{x\to 3} |x-3|$$

Recordemos el Teorema de Interposición, que nos dice que si tenemos una función $f(x)$ acotada entre 2 funciones $g(x)$ y $h(x)$ tales que

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

entonces, si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

En este sentido, evaluamos los límites que involucran al valor absoluto.

$$\lim_{x\to 3} -|x-3| = 0 \quad y \quad \lim_{x\to 3} |x-3| = 0$$

Luego, por el Teorema de Interposición, vemos que el límite existe y vale 0. Finalmente:

**5. Respuesta**

$$\lim_{x\to 3} |x-3| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) = 0$$

- **[4 puntos]** Compruebe que el polinomio $2x^3+3x^2-\frac{1}{5}$ tiene dos raíces negativas y una raíz positiva.

Recordemos el Teorema de Bolzano, este nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$; si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)=0$.

Como $f(x) = 2x^3+3x^2-\frac{1}{5}$ es un polinomio, entonces es continuo en $\mathbf{R}$. Debemos hallar los intervalos donde $f(x)$ cambia de signo.

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & -\frac{1}{5} \\ \\ f(1) & = & \frac{24}{5} \end{array}\right\} [0,1] \text{ Raíz positiva}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(-1) & = & \frac{4}{5} \\ \\ f(0) & = & -\frac{1}{5} \end{array}\right\} [-1,0] \text{ Raíz negativa}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(-2) & = & \frac{4}{5} \\ \\ f(-1) & = & -\frac{21}{5} \end{array}\right\} [-2,-1] \text{ Raíz negativa}$$

Y así, por el Teorema de Bolzano, hemos encontrado el intervalo en que se encuentran las 3 raíces de la función $f(x) = 2x^3+3x^2-\frac{1}{5}$, siendo 2 raíces negativas $x_1 \in [-2,-1]$, $x_2 \in [-1,0]$ y 1 raíz positiva $x_3 \in [0,1]$

- **[6 puntos]** Halle los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$ para que la función $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea diferenciable en $x=0$ y continua en $x=1$

**SOLUCIÓN:**

Si la función $f(x)$ es diferenciable en $x=0$, entonces es continua en $x=0$. Evaluamos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$ y $x=1$, de manera que podamos hallar alguna relación entre las constantes $a$, $b$ y $c$:

- Continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax^2 + bx + c = c$$

De aquí obtenemos que, para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, entonces $c = 2$

- Continuidad en $x = 1$:

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + c = a + b + c$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

De aquí, obtenemos la siguiente relación

$$a + b + c = 2 \longrightarrow a + b = 0$$

- Diferenciabilidad en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x) - 2}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{(\Delta x + 2) - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{a\Delta x^2 + b\Delta x + \cancelto{2}{c} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x(a\Delta x + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} (a\Delta x + b) = b$$

Luego, para que $f(x)$ sea diferenciable en $x = 0$, $b = 1$. Entonces, $a + 1 = 0 \longrightarrow a = -1$
Finalmente los valores de $a$, $b$ y $c$ para que $f(x)$ sea diferenciable en $x = 0$ y continua en $x = 1$ son

$$a = -1 \quad b = 1 \quad c = 2$$

1. **[4 puntos]** Hay dos rectas tangentes a la curva de ecuación $y = 4 - x^2$ que pasan por el punto $P(0, 8)$. Usando la definición de derivada, halle las ecuaciones de ambas rectas tangentes.

**SOLUCIÓN:**

La ecuación de una recta tangente a $f(x) = 4 - x^2$ en el punto de tangencia $Q(x_0, y_0)$ y que pase por $P(0, 8)$ es:

$$(y_0 - 8) = f'(x_0)(x - 0) \quad \longrightarrow \quad y_0 = f'(x_0)x + 8$$

Calculamos $f'(x_0)$ por definición de derivada:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 - (x_0 + \Delta x)^2) - (4 - x_0^2)}{\Delta x} \\
&= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - x_0^2 - 2x_0\Delta x - \Delta x^2) - 4 + x_0^2)}{\Delta x} \\
&= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-2x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \quad \lim_{\Delta x \to 0} -2x_0 - \Delta x = -2x_0
\end{aligned}$$

$$f'(x_0) = -2x_0$$

Luego, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4 - x^2$ es

$$y_0 = -2x_0 \cdot x + 8 \longrightarrow y_0 = -2x^2 + 8$$

El punto $Q(x_0, y_0)$ pertenece tanto a $y = 4 - x^2$ como a $y_0 = -2x^2 + 8$. Hallamos la intersección del sistema

$$f(x) = \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ \\ y_0 = -2x^2 + 8 \end{cases}$$

Igualamos ambas ecuaciones

$$4 - x^2 = -2x^2 + 8 \longrightarrow x_0^2 = 4$$

Luego, $x_0 = \pm 2$ y las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ son

$$L_1 = -4x + 8 \quad \text{y} \quad L_2 = 4x + 8$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Luis Fernando Doria** para **GECOUSB**

Luis Fernando Doria
20-10241
Ing. Química

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **luisferdoria2003@gmail.com**